



الصفحة  
1  
4

**الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا**  
**الدورة العادلة 2012**  
**الموضوع**

الملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية  
 المركز الوطني للنقوص والامتحانات

9	المعامل	NS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المسارك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(5.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(4.5ن)

**يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة**

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- في الحلقة الواحدية  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  ، نعتبر المصفوفتين **I**

(1) احسب  $I - A^2$  و  $0.75$ (2) استنتج أن  $A$  تقبل مقابلا المطلوب تحديده .  $0.5$ **II** - لكل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  من المجال  $I = [1, +\infty[$  نضع :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1 \quad 0.25$$

(2) بين أن \* قانون تركيب داخلي في **I**  $0.5$ (3) تذكر أن  $(\mathbb{R}^{**}, \times)$  زمرة تبادلية .

$$\varphi: \mathbb{R}^{**} \rightarrow I$$

نعتبر التطبيق  
 $x \mapsto \sqrt{x+1}$

أ- بين أن التطبيق  $\varphi$  تشاكل تقابلية من  $(\mathbb{R}^{**}, \times)$  نحو  $(I, *)$   $0.5$ ب- استنتاج بنية  $(I, *)$   $0.25$ 

$$\text{ج- بين أن المجموعة } \Gamma = \left\{ \sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{Z} \right\} \text{ زمرة جزئية من } (I, *) \quad 0.75$$

التمرين الثاني : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلانالمستوى العقدي منسوب إلى معلم معتمد منظم و مباشر  $(O; \bar{u}, \bar{v})$  .**I** - نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E): iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$  حيث  $a$  عدد عقدي غير منعدم.(1) حدد  $z_1$  و  $z_2$  حل المعادلة  $(E)$   $0.75$ (2) أ- تحقق أن :  $z_1 z_2 = a^2(i-1)$   $0.25$ 

$$\text{ب- بين أن : } \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[ \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow z_1 z_2 \text{ عدد حقيقي} \quad 0.5$$

**II** - ليكن  $c$  عددا حقيقيا غير منعدم و  $z$  عددا عقديا غير منعدم .نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $M$  التي أحاقها على التوالي هي:  $1$  و  $i$  و  $c$  و  $1+i$  و  $ic$  و  $z$  و  $ic+1$  و  $ic-1$  و  $z$  و  $ic+1$  و  $ic-1$  و  $z$  .  
(1) أ- بين أن:  $A$  و  $D$  و  $M$  مستقيمية  $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$   $0.5$ (لاحظ أن  $c = \bar{c}$ )  $\Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0 \Leftrightarrow (AD) \perp (OM)$   $0.5$ ب- بين أن :  $(AD) \perp (OM)$   $0.5$ (2) ليكن  $h$  لحق النقطة  $H$ ، المسقط العمودي للنقطة  $O$  على  $(AD)$ 

$$\text{أ- بين أن : } h - (1+i) = \frac{i}{c}(h - c) \quad 0.75$$

ب- استنتاج أن :  $(CH) \perp (BH)$   $0.25$

التمرين الثالث: (3 نقط)نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $(E) : 143x - 195y = 52$ 

- (1) أ- حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 143 واستنتج أن المعادلة  $(E)$  تقبل حلولا في  $\mathbb{Z}^2$   
ب- علما أن الزوج  $(-1, -1)$  حل خاص للمعادلة  $(E)$  ، حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $(E)$  مبرزا مراحل الحل .

(2) ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولى مع 5

$$n^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$$
 بين أن لكل  $k$  من  $\mathbb{N}$  لدينا:

- (3) ليكن  $x$  و  $y$  عددين صحيحين طبيعين غير منعدمين بحيث:  $x \equiv y \pmod{4}$

$$n^x \equiv n^y \pmod{5}$$
 أ- بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا:

$$n^x \equiv n^y \pmod{10}$$
 ب- استنتاج أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا:

- (4) ليكن  $x$  و  $y$  عددين صحيحين طبيعين بحيث يكون الزوج  $(x, y)$  حل للمعادلة  $(E)$

بين أنه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  ، العددان  $n^x$  و  $n^y$  لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .التمرين الرابع: (5.5 نقطة)

عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية  $f_n$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:ليكن  $(C_n)$  المنحني الممثل للدالة  $f_n$  في المستوى المرسوم إلى معلم متعمد منظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ 

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$
 (1) أحسب  $f_n(x)$  و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) \text{ (2) ادرس الفرع الالهائي للمنحني } (C_n) \text{ بجوار } -\infty$$

- ب- بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $x = y$  مقارب مائل للمنحني  $(C_n)$  بجوار  $+\infty$  ، وحدد الوضع النسبي

 $(D)$  للمنحني  $(C_n)$  و(3) ادرس تغيرات الدالة  $f_n$  ثم ضع جدول تغيراتها .

$$(\ln 3 \approx 1,1 \text{ و } f_3(-0,6) = 0 \text{ و } f_3(-1,5) \approx 0) \quad (C_3) \quad (4) \text{ أنشئ المنحني } (C_3)$$

$$\frac{e}{n} < \ln n \quad \text{فإن } n \geq 3 \quad (5) \quad \text{أ- بين أنه إذا كان}$$

ب- بين أنه إذا كان  $n \geq 3$  فإن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل بالضبط حللين  $x_n$  و  $y_n$  حيث :

$$\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0 \quad \text{و} \quad x_n \leq -\ln n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \quad (6) \quad \text{ج- احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x & ; \quad x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases} \quad (6) \quad \text{ل لكن } g \text{ الدالة العددية المعرفة على } [0, +\infty] \text{ بما يلي :}$$

أ- بين أن الدالة  $g$  متصلة على اليمين في 0

ب- تتحقق أن لكل  $n \geq 3$  
$$g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$$

ج- استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$

### التمرين الخامس: (4.5 نقطة)

[0,1]	$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$ لـ $x$ من [0,1] بما يلي :	نعتبر الدالة العددية $F$ المعرفة على [0,1] بما يلي :	0.25
(1)	ليكن $x$ من [0,1]. بين أن لكل $t$ من [0, $x$ ] لدينا :	$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$	0.25
(2)	ليكن $x$ من [0,1].		
	$F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$ :	- بين أن :	0.5
	ب- بين أن $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ :	ثم استنتاج أن الدالة $F$ متصلة على اليمين في الصفر.	0.75
(3)	باستعمال متكاملة بالأجزاء بين أن لكل $x$ من [0,1] :	$\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$	0.75
(4)	ليكن $x$ من [0,1].		
	- بين أن :	$F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$	0.5
	ب- بين أن $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ ( يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1 )		0.75
	ج- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $F$ في المجال [0, $x$ ] بين أن :		0.75
	$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$		
	د- استنتاج أن الدالة $F$ قابلة للاشتغال على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0		0.25

**انتهى الموضوع**